E.N.S.I. PHYSIQUE & MECANIQUE 1982

Programme M **PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES** (4 h)

N.B. — *Il est demandé* EXPRESSÉMENT *aux candidats de donner des démonstrations* CLAIRES, CONCISES *et* RIGOUREUSES. *Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur.*

Les candidats doivent respecter les notations du texte et peuvent admettre le résultat d'une question non résolue pour traiter les questions suivantes.

I

$(E, \| \ \|)$ désigne un C-espace vectoriel normé; on note BO (x, r) [resp. BF (x, r)] la boule ouverte (resp. fermée) de centre x et de rayon r.

1° Soit f une forme linéaire sur E. Montrer que f est continue si et seulement s'il existe $A \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \in E$, on a $|f(x)| \leqslant A\|x\|$.

2° $\mathcal{L}_C(E, \mathbb{C})$ est l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E.

Soit $f \in \mathcal{L}_C(E, \mathbb{C})$.

a. Montrer que $\|f\|_* = \text{Sup}\{|f(x)| \ ; x \in \text{BF}(0,1)\}$ existe et définit une norme sur $\mathcal{L}_C(E, \mathbb{C})$.

b. Montrer que, pour tout $x \in E$, $|f(x)| \leqslant \|f\|_* \|x\|$. En déduire que

$$\|f\|_* = \text{Inf}\{A \geqslant 0 \ ; \forall x \in E \ |f(x)| \leqslant A\|x\|\}.$$

II

ω est le C-espace vectoriel des suites complexes $X = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$; Φ le sous-espace vectoriel de ω des suites nulles à partir d'un certain rang et C_0 le sous-espace vectoriel de ω des suites qui convergent vers 0.

Pour tout entier naturel n, on note e_n l'élément de ω ayant tous ses termes nuls sauf celui d'indice n qui vaut 1 ($e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$).

On rappelle qu'un espace vectoriel normé est complet si toute suite de Cauchy converge.

Les familles de nombres qui dépendent de deux indices seront notées avec un indice inférieur et un indice *supérieur,* aucune ambiguïté n'étant possible avec un exposant.

1° Montrer que $\|X\| = \underset{n \in \mathbb{N}}{\text{Sup}} |x_n|$ est une norme sur C_0 et que $(C_0, \| \ \|)$ est complet. (On notera $(X^p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de C_0 avec $X^p = (x_n^p)_{n \in \mathbb{N}}$ et on montrera que cette suite converge vers un élément $X = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans l'espace normé $(C_0, \| \ \|)$).

2° Montrer que si $X = (x_n)_n \in C_0$ la suite $(X^p)_{p \in \mathbb{N}}$ de C_0 définie par $X^p = \sum_{n=0}^{p} x_n e_n$ converge dans $(C_0, \| \ \|)$ vers X. En déduire que Φ est dense dans C_0.

3° Soit U une forme linéaire continue sur C_0; on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U(e_n) = u_n$ et on note, conformément à I, $\|U\|_* = \text{Sup}\{|U(X)| \ ; \|X\| \leqslant 1\}$.

a. Montrer que, pour tout $X = (x_n)_n \in C_0$, on a $U(X) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x_n$.

b. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $X = (x_n)_n \in \Phi$ avec $\|X\| \leqslant 1$ tel que :

$$|U(X)| = \sum_{n=0}^{N} |u_n|.$$

En déduire que $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \leqslant \|U\|_*$

c. Montrer que, pour tout $X = (x_n)_n \in C_0$ on a $|U(X)| \leqslant \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|\right) \cdot \|X\|$.

En déduire que $\|U\|_* = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$.

.../...

4° Réciproquement, soit $U = (u_n)_n \in \omega$ tel que $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ converge.

a. Montrer que, pour tout $X = (x_n)_n \in C_0$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x_n$ est absolument convergente et que

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n x_n\right| \leqslant \|X\| \left[\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|\right]$$

On note alors $U(X) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x_n$.

b. En déduire que l'application $X \to U(X)$ est une forme linéaire continue sur C_0.

On pourra donc *identifier* toute forme linéaire continue U sur C_0 avec la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = U(e_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On désignera *indistinctement* par U la forme linéaire continue sur C_0 et la suite $(u_n)_n$.

5° Soit $(U^p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de formes linéaires continues sur C_0 $\left[U^p = (u_n^p)_{n \in \mathbb{N}}\right]$ telles que :

i. $\exists\ M > 0$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}$ $\|U^p\|_* \leqslant M$;

ii. $\forall\ X \in \Phi$ $\lim_{p\ \infty} U^p(X) = 0$.

Montrer que $\forall\ X \in C_0$, $\lim_{p\ \infty} U^p(X) = 0$.

III

Soit $(u_n^p)_{(p,n) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double de nombres complexes telle que :

(α) il existe $M > 0$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n^p| \leqslant M$

1° Montrer que, si la suite $S = (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \omega$ est bornée, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^p s_n$ est absolument convergente.

On pourra donc associer à chaque suite bornée $S = (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite $T = (t_p)_{p \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$t_p = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^p s_n.$$

Cette notation sera conservée dans les questions suivantes.

2° On suppose dans cette question que la condition suivante est réalisée :

(β_0) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{p\ \infty} u_n^p = 0$.

a. Montrer que si $S = (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C_0$, alors $T = (t_p)_{p \in \mathbb{N}} \in C_0$.

(On utilisera les résultats du II, en considérant les formes linéaires continues sur C_0 définies par $U^p = (u_n^p)_{n \in \mathbb{N}}$).

b. Montrer que, si, avec (α) et (β_0), la condition suivante est satisfaite :

(γ_0) $\lim_{p\ \infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n^p\right) = 1$

alors, si la suite $S = (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers s la suite $T = (t_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers s.

.../...

3° *Applications :*

a. Soit $(a_n)_n$ une suite réelle; on note, pour $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $t_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k$.

On rappelle que la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge vers s si $\lim_{n \infty} s_n = s$.

On dira que la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ est C-*convergente* vers t si $\lim_{n \infty} t_n = t$.

α. Etudier la convergence et la C-convergence des séries $\sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \sin n\theta$ pour les différentes valeurs de $\theta \in]\,0,\, 2\,\pi\,[$.

β. Même question pour la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-\,1)^n\,(n+1)$.

γ. *A l'aide du* 2°, montrer que si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge vers s, alors elle est C-convergente vers s.

b. Soit $(a_n)_n$ une suite réelle; on considère la série entière réelle $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ et on note $t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ sa somme lorsqu'elle existe, R étant son rayon de convergence et $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

On dira que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est A-*convergente* vers t si $R \geqslant 1$ et si $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} t\,(x) = t$.

α. Étudier la A-convergence des séries $\sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \sin n\theta$ pour $\theta \in]\,0,\, 2\,\pi\,[$.

β. Même question pour la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-\,1)^n\,(n+1)$.

γ. Montrer que, si $R \geqslant 1$, alors pour $|x| < 1$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)\, x^n\, s_n$ est convergente et a pour somme $t(x)$.

δ. Soit $(x_p)_p$ une suite réelle de $[0, 1[$ telle que $\lim_{p \infty} x_p = 1$. *A l'aide du* 2°, en considérant la suite double $(u_n^p)_{p,n}$ définie par $u_n^p = (1 - x_p)x_p^n$, montrer que si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge vers s alors elle est A-convergente vers s.

.../...

c. On considère la suite $(a_n)_n$ suivante :

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \quad a_{2k} = 0 \qquad \text{et} \qquad a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. En déduire, en utilisant la question précédente, que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

4° On suppose dans cette question que la suite double $(u_n^p)_{(p,\,n)}$ satisfait aux conditions :

(α) $\quad \exists\, M > 0$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n^p| \leqslant M$

(β) $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, $\quad \lim_{p\,\infty} u_n^p = \delta_n$

(γ) $\quad \lim_{p\,\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n^p \right) = \delta$

a. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n$ est absolument convergente.

b. Montrer, à l'aide du 2°, que si $(s_n)_n$ converge vers s alors $(t_p)_p$ converge vers

$$t = \delta s - s \left(\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n\, s_n.$$

IV

Soit $(E, \| \|)$ un C-espace vectoriel normé complet.

Pour toute partie A de E, on notera $\bar{A}$ l'adhérence de A et $\mathring{A}$ l'intérieur de A.

1° On considère $(O_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'ouverts de E tels que $\bar{O}_n = E$ (O_n est dense dans E). On pose :

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} O_n.$$

a. Montrer que, pour tout ouvert non vide O de E, on peut construire une suite $(X_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de E et une suite réelle $(r_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ telles que :

i. $\mathrm{BF}(X_1, r_1) \subset O_1 \cap O$

ii. si $p \geqslant 2$ $\quad \mathrm{BF}(X_p, r_p) \subset O_p \cap \mathrm{BO}(X_{p-1}, r_{p-1})$

iii. si $p \in \mathbb{N}^*$ $\quad 0 < r_p < \frac{1}{p}$

b. Montrer que la suite $(X_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ ainsi construite est une suite de Cauchy. En déduire que A est dense dans E.

2° Soit $(U_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ une suite de formes linéaires continues sur E telles que, pour tout $X \in E$, la suite $\big(U_p(X)\big)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est convergente dans C. On note $U(X) = \lim_{p\,\infty} U_p(X)$.

On pose $M(X) = \sup_{p \in \mathbb{N}^*} |U_p(X)|$ et, si $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = \{X \in E \ / \ M(X) > n\}$.

a. Montrer que U est une forme linéaire sur E.

.../...

b. Montrer que V_n est ouvert et que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} V_n = \varnothing$.

c. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$, $X_0 \in E$, $r > 0$ tels que $BF(X_0, r) \cap V_N = \varnothing$. En déduire qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\|U_p\|_* \leqslant M$ et que U est continue.

V

1° Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que :

i. $a_0 > 0$;

ii. $a_n \geqslant 0$ pour $n \geqslant 1$;

iii. La série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est divergente.

a. Montrer que, si $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{A_n}$ est divergente.

b. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \omega$ telle que, pour toute suite $S = (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C_0$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n s_n$ converge.

Montrer, en utilisant la question précédente, que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est absolument convergente.

2° Soit $(u_n^p)_{(p,\, n)}$ une suite double de complexes telle que, pour toute suite $S = (s_n)_n \in \omega$ convergente, on a :

i. $\forall\, p \in \mathbb{N}$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^p s_n$ converge;

ii. $\lim_{p \to \infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n^p\, s_n \right)$ existe.

Montrer que $(u_n^p)_{(p,\, n)}$ satisfait aux conditions (α), (β) et (γ) de III.4°.
[On montrera d'abord (β), puis (γ), puis (α) en utilisant IV].

3° Déduire des résultats précédents que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(C_1) pour toute série $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ convergente, la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ converge,

(C_2) $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n - x_{n+1}|$ converge.

Pour cela, on posera

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} y_k \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} u_n^p = (x_n - x_{n+1}) \ \text{ si } 0 \leqslant n \leqslant p-1 \\ u_p^p = x_p \\ u_n^p = 0 \ \text{ si } n > p \end{cases}$$

et on utilisera la question 2°.

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail